

NOTIZEN

Factorization of Projection Operators
for the Symmetric Group

P. KRAMER *

Instituto de Física, Universidad de México, México, D.F.

(Z. Naturforschg. 21 a, 657—658 [1966]; received 11 March 1966)

1. In many physical applications it is necessary to project out from a given set of functions those transforming according to an irreducible representation μ of a finite group $\mathcal{G}$, where e. g. in nuclear physics $\mathcal{G}$ may be the symmetric group S_n of permutations of n particles. It is well-known that the corresponding projection operators may be formed from the group elements p by using the elements

$$a = \sum_{p \in \mathcal{G}} a(p) p \quad (1)$$

of the group algebra $^1 \mathcal{A}$ of $\mathcal{G}$. To characterize an irreducible representation of $\mathcal{G}$, the required operators must commute with all group elements, i. e. their coefficients in (1) must fulfill

$$a(p p') = a(p' p). \quad (2)$$

Elements with this property form a subalgebra (the center 1) of $\mathcal{A}$ and can be written as linear combinations of the linearly independent "sums of a class" (SOC's) 2

$$\mathcal{R}(k) = \sum_{p \in (k)} p, \quad (3)$$

where (k) denotes a class of $\mathcal{G}$. The projection operator for the irreducible representation μ of $\mathcal{G}$ is given by 2

$$\mathcal{P}^\mu = (1/g) \chi^\mu(1) \sum_{(k) \in \mathcal{G}} (\chi^\mu(k))^* \mathcal{R}(k), \quad (4)$$

where $\chi^\mu(k)$ is the character of class (k) and g is the number of group elements. Using the orthogonality relations, (4) can be inverted to yield

$$\mathcal{R}(k) = \sum_{\mu} \lambda^\mu(k) \mathcal{P}^\mu, \quad \lambda^\mu(k) = g_k \chi^\mu(k) / \chi^\mu(1). \quad (5)$$

This equation shows that for a basis function of the irreducible representation μ of $\mathcal{G}$ all SOC's are diagonal with eigenvalues $g_k \chi^\mu(k) / \chi^\mu(1)$ where g_k is the number of group elements in class (k) . Because of the orthogonality relations, these eigenvalues characterize the bases with respect to μ uniquely. In this note it is shown that for the symmetric group S_n the projection operators (4) may be factorized in a way involving the SOC's of the subset of cyclic classes only.

2. A class of the symmetric group S_n is determined by the number α_1 of one-cycles, the number α_2 of two-cycles etc. where the α_i are n nonnegative integers fulfilling

$$\sum_{i=2}^n i \cdot \alpha_i = n - \alpha_1. \quad (6)$$

We denote a class by the symbol $(k) = (2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n})$ where we have omitted the one-cycles for the present purpose and where i^{α_i} stands for the number i repeated α_i times. The eigenvalues of all SOC's fix uniquely an irreducible representation μ of S_n . On the other hand it is well-known that an irreducible representation of S_n may be characterized by n partition numbers which sum up to n ¹. This suggests that all SOC's of S_n may be generated by a subset of $n-1$ elements of the center of $\mathcal{A}$.

It can be shown that these generating elements of the center are the SOC's of the $n-1$ classes with purely cyclic elements. For the proof it is convenient to arrange the classes of S_n into sets according to their "degree" $l = n - \alpha_1$. Let us consider the product of cyclic classes $(2)^{\beta_2} \dots (n)^{\beta_n}$ where $(i)^{\beta_i}$ denotes the β_i -th power of the cyclic class (i) and where the β_i are nonnegative integers fulfilling the same equation (6) as do the α_i . This product belongs to the center and therefore can be written in a unique manner as a linear combination of all classes of S_n . It can be seen that in the expansion

$$(2)^{\beta_2} \dots (n)^{\beta_n} = \sum_{\alpha_2, \dots, \alpha_n} C_{\alpha_2, \dots, \alpha_n}^{\beta_2, \dots, \beta_n} (2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}), \quad (7)$$

there is precisely one class of highest degree $l = n - \beta_1$ with cycle structure $(2)^{\beta_2} \dots (n)^{\beta_n}$. There are $n! (\beta_1! \beta_2! \dots \beta_n!)^{-1}$ permutations of this class in the expansion (7) whereas the total number of distinct class elements is $n! (1^{\beta_1} \beta_1! 2^{\beta_2} \beta_2! \dots n^{\beta_n} \beta_n!)^{-1}$. Therefore we may write

$$(2)^{\beta_2} \dots (n)^{\beta_n} = (2)^{\beta_2} \dots (n)^{\beta_n} \prod_{i=2}^n i^{\beta_i} \quad (8)$$

+ classes of degree $l \leq n - \beta_1 - 1$.

Expressing the products on the left-hand side of (7) for all allowed values of $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$ linearly in terms of the classes of S_n , one obtains a matrix whose rows may be arranged in decreasing order of $l = n - \beta_1$ while the columns may be arranged in decreasing order of $l = n - \alpha_1$. Then it follows from (8) that all elements of this matrix which are below the diagonal are zero. Therefore, the determinant of the matrix is given

* Forschungsstipendiat der NATO.

¹ H. WEYL, Theory of Groups and Quantum Mechanics, Princeton University Press, Princeton 1931.

² P. H. E. MEIJER, Phys. Rev. 95, 1443 [1954].



by the product of the diagonal elements, i. e.

$$|C| = \prod_{\beta_2 \dots \beta_n} 2^{\beta_2} \dots n^{\beta_n} \neq 0. \quad (9)$$

Consequently, the matrix is non-singular and may be inverted to yield all classes of S_n as linear combinations of products of the purely cyclic classes.

3. To obtain the projection operators (4) in terms of the SOC's of the cyclic classes (2), (3), ..., (n), one has, in principle, to invert the matrix C considered in section 2. We may, however, make use of the fact that the eigenvalues $\lambda^\mu(i)$, $i=2, 3, \dots, n$ of the SOC's of the cyclic classes suffice to completely characterize bases for the irreducible representation μ of S_n . These eigenvalues are given in terms of the characters of S_n , and we may therefore employ the LÖWDIN³ projection procedure to write

$$\mathfrak{P}^\mu = \prod_{i=2}^n \left[\prod_{\nu} \frac{\mathfrak{K}(i) - \lambda^\nu(i)}{\lambda^\mu(i) - \lambda^\nu(i)} \right]. \quad (10)$$

$\lambda^\nu(i) \neq \lambda^\mu(i)$

³ P.-O. LÖWDIN, Rev. Mod. Phys. **36**, 966 [1964].

The first product gives the desired factorization, and the full expression obviously yields one for bases of the irreducible representation μ of S_n and zero otherwise. Another way of obtaining the bases would be to diagonalize the $n-1$ operators $\mathfrak{K}(i)$, $i=2, 3, \dots, n$. Besides the characters of the cyclic classes of S_n , (10) employs only the matrix elements of the cyclic permutations and therefore reduces considerably the labour involved in the projection procedure. To obtain YAMANOUCHI bases which transform irreducibly under all groups in the chain $S_n \supset S_{n-1} \supset \dots \supset S_2$, the projection may be repeated for each subgroup in the chain.

An important application of this projection technique arises from the consideration of states given in terms of relative coordinates. States of this type result in nuclear physics from the elimination of center of mass motion and from the examination of clustering in the harmonic oscillator shell model⁴.

⁴ P. KRAMER and M. MOSHINSKY, Nucl. Phys., to appear.

Zum Leitfähigkeitsmechanismus des Selens

H. EGGERT

Siemens-Schuckertwerke AG, Berlin-Siemensstadt, Schaltwerk
(Z. Naturforschg. **21 a**, 658—660 [1966]; eingegangen am 19. März 1966)

Das Selen wird wegen der exponentiellen Abhängigkeit seiner elektrischen Leitfähigkeit von der Temperatur zu den Halbleitern gerechnet und gehört damit zu den ältesten untersuchten Stoffen der Halbleiterphysik. Trotzdem ist bemerkenswert, daß bis zum heutigen Tage ein umfassendes Modell der elektrischen Leitfähigkeit fehlt. Dies liegt nur zum Teil daran, daß die elektrische Leitfähigkeit eine komplizierte Funktion von Verunreinigungen, Dotierungen, Kristallisationszustand, Temperaturvorgeschichte usw. ist (viele der erheblich differierenden Versuchsergebnisse auf dem Selengebiet haben hier allerdings ihre Ursache). Der Hauptgrund für das bisherige Versagen bei der physikalischen Deutung liegt sicher jedoch daran, daß das Leitfähigkeitsmodell der „freien Stromträger“ (Elektronengasmodell), das die Grundlage der konventionellen Theorien der Halbleiter und Metalle ist, den Verhältnissen beim Selen nicht adäquat ist. So stellen JOFFE und REGEL¹ das Selen in eine Reihe mit einer großen Gruppe von „Halbleitern“, bei denen die elektrischen Eigenschaften nur durch die Nahordnung der atomaren Bausteine zu erklären sind. Dies steht im schroffen Gegensatz zu dem Fernordnungsgedanken der Elektronengastheorie.

Diese Stoffe zeigen meist eine exponentiell mit der Temperatur zunehmende Beweglichkeit. Es ist bemerkenswert, daß das Trägergasmodell keinen Streumechanismus mit dieser Temperaturabhängigkeit kennt. Die Verfasser weisen u. a. darauf hin, daß das Modell der freien Stromträger bei allen Stoffen versagen sollte, deren Beweglichkeit kleiner als 100 cm²/Vs ist, weil die mittlere freie Weglänge dann kleiner wird als die Wellenlänge eines Elektrons mit thermischer Geschwindigkeit bei Zimmertemperatur. Bei Beweglichkeiten kleiner als 5 cm²/Vs wird die mittlere freie Weglänge sogar kleiner als eine Gitterkonstante. Mit einer Beweglichkeit zwischen 10⁻³ ... 1 cm²/Vs gehört Selen klar in diese Gruppe².

Außer diesen theoretischen Einwänden gegen das Elektronengasmodell gibt es jedoch eine Reihe eindeutiger experimenteller Ergebnisse, die sich durch freie Träger nicht erklären lassen. Dazu gehören besonders die Absorptionsmessungen von GOBRECHT und TAUSEND³ im nahen Infrarot. Die Autoren finden im Ausläufer der Grundgitterabsorption zwischen 4 und 23 μ m eine praktisch konstante Absorption, wenn man von einigen charakteristischen scharfen Banden absieht. Dies gilt sowohl für amorphes als auch einkristallines Selen. Wenn freie Defektelektronen im Selen vorhanden wären, dann müßte im untersuchten Einstrahlungsbereich die Absorption der freien Träger mit dem Quadrat der Wellenlänge zunehmen⁴. Das völlige Fehlen dieser Absorption ist ein starker Hinweis auf eine gewisse Bindung der Defektelektronen.

¹ A. F. JOFFE u. A. R. REGEL, Progress in Semiconductors, Vol. 4, Heywood & Company Ltd., London 1960, S. 237.

² Im Falle der Existenz von Potentialbarrieren um sonst hochleitende Bereiche werden diese Abschätzungen der Beweglichkeit natürlich ungültig.

³ H. GOBRECHT u. A. TAUSEND, Z. Phys. **161**, 205 [1961]. — A. TAUSEND, Dissertation; Technische Universität Berlin, 1961.

⁴ T. S. MOSS, Optical Properties of Semiconductors, Butterworth, London 1961.